ANNEX SEGON

BREU DESENVOLUPAMENT, DELS ESTUDIS DE LA GEOMETRIA I LA TRIGONOMETRIA CLÀSSIQUES

CAPÍTOL XV
BREU INTRODUCCIÓ A LA GEOMETRIA CLÀSSICA
Pep Bermejo

ABANS D'ERATOSTENS

És evident que abans de la divisió de la circumferència en 360º, les basses geomètriques estven referides als rectes.

Observem en primer lloc el valor dels angles interiors d'un polígon:

En el cas del triàngle	seran 2 rectes
En el cas del quadrilater	seran 4 rectes
En el cas del exàgonm	seran 8 rectes
En el cas del decàgon	seran 16 rectes

Que es podia deduir d'això:
Que en tots els casos es produirà que el valor de la suma dels angles interiors seran igual al producte de 2 rectes, pel número d'angles del polígon menys 2.

Com exemple estudiarem l'exàgon.

2 rectes x (6-2) = 8 rectes
Com a consecuencia al no disposar de valors fracionaris del recte, tindrem que cada angle de l'exàgon regular valdrà:

$$\frac{8}{6} = \text{valor de cada angle de l'exàgon regular}$$

L'altre tema era el valor dels costats del triàngle sagrat, Pitàgores va enunciar el seu teorema i va fer seva la relació, ja coneguda pels egipcis

$$a^2 = b^2 + c^2$$

De les paral·leles als costat del mateix triangle sagrat, Tales de Milet, va enunciar el esu teorema, relació ja coneguda pels egipcis.

Els segments interceptats son proporcionals
Dins d'un mateix costat, els segments obtinguts per paral·leles equidistants son iguals.
Els triangles menors resultants de tallar els costats per paral·leles a d'altres costats son proporcionals.
Per a dividir un segment en un número "n" de parts iguals, cal dibuixar una recta que fa angle en qualsevol dels s extrems del segment.

Fer les parts iguals sobre la recta en les que dessitgem dividir el sement i tancant el triangle, sols fa falta dibuixar paral·leles a aquesta recta des de cada punt marcat a la recta, els segments interceptats seran iguals.

Daltres bases geomètriques seguien el mateix camó al no disposar dels valors fragmentaris del recta.

15.1 ELS TRIANGLES

El triangle, el polígon menor, la figura geomètrica indeformable, va ser la base pel desenvolupament de la geometria.
Es molt important remarcar, que per arribar a aquestes conclusions era imprescindible la divisió de la circumferència en 360º i per tant els orígens son de l'època d'Eratostens o posterior.

Els triangles fonamentals seran:
El triangle sagrat, el triangle Ísic, el triangle esquadratic, el triangle cartabonic i el triangle equilàter.
En el cas dels dos primers, com que el valor desitjat eren els costats, no estaven referits en principi als angles, això va permetre el dessenvolupament de la geometria primitiva.

TRIANGLE SAGRAT			
Angles	**A**	**B**	**C**
	90º	36º 52'12''	53º 07'48''
Costats	**a**	**b**	**c**
	5	4	3

TRIANGLE ÍSIC			
Angles	**A**	**B**	**C**
	90º	36º 52'12''	53º 07'48''
Costats	**a**	**b**	**c**
	25	20	15

El triangle isic, de la deésa Isis, te com a mides 15, 20 i 25, de fet, és el resultat de multiplicar per cinc, cada costat del triangle original, sols te l'avantatge de ser a més, divisible per 5.

TRIANGLE ESCAIRATIC		de l'escaira	(duoequiangle o duoequilater).
Angles	**A**	**B**	**C**
	90º	45º	45º
Costats	**a**	**b**	**c**
			b = c

TRIANGLE CARTABONIC		del cartabó	
Angles	**A**	**B**	**C**
	90º	30º	60º
Costats	**a**	**b**	**c**

TRIANGLE EQUILÀTER O EQUIGONOS

Angles	**A**	**B**	**C**
	60º	60º	60º
Costats	**a**	**b**	**c**
	X1	x2	x3

X1 = x2 = x3

15.2 RELACIONS I TIPUS DE TRIANGLES

Coneguts els triangles primers, cal fer una sèrie de reflexions que ens conduiran a entendre els principis de la geometria.

Tipus de triangles:

TRIANGLE SAGRAT
TRIANGLE ÍSIC
Aquets triangles tenen com definició la magnitud dels seus costats

TRIANGLE ESCAIRATIC
TRIANGLE CARTABONIC
Aquets triangles tenen com definició la magnitud dels seus angles

TRIANGLE EQUILÀTER O EQUIGONOS
Aquest triangle te com definició la magnitud dels seus angles i la condició de que els seus costats son necessariament iguals, independentment de l'unitat de mesura que emprem.
Te també la propietat de tenir com a superfície 1/6, d'un polígon exagonal regular.

Relacions entre els triangles:

Tots aquests triangles son rectangles
TRIANGLE SAGRAT
TRIANGLE ÍSIC
TRIANGLE ESCAIRATIC
TRIANGLE CARTABONIC

El triangle equilàter no és rectangle.
La meitat del triangle equilàter és igual a dos triangles cartabonics.
La unió de dos triangles equilàters és igual a un rombe regular.
La unió per la hipotenusa de dos triangles escairatics es un quadrat regular.
La unió per un catet de dos triangles escairatics es igual al triangle meitat, triangle que te la base, igual a la meitat de l'altura i per tant.

$(X + X) \times X$ = S triangle meitat $= 2X \times X$

Si unim pel catet major, l'oposat a l'angle de 60º, dos triangles cartabonics, obtindrem un nou triangle que complirà una sèrie de condicions, condicions necessàries per tal d'entendre el càlcul de superfícies poligonals.
En primer lloc, la nova construcció geomètrica serà un triangle equilàter, veiem la relació entre els costats, utilitzarem nomenclatura i valors, expressats en l'apartat anterior.
La base del nou triangle serà igual a la suma dels dos catets menors del triangle cartabonic.

Base = $X + X = 2X$

Ara be, com la nova construcció, te els tres angles i els tres costats iguals, tindrem:

$2X = Y$

Per tant Y serà igual a dues vegades el catet menor
Z, serà l'altura del triangle.
Basant-nos en el càlcul de la superfície del triangle i seguint el raonament de Pitàgores, de la superfície meitat del quadrat o el rectangle.

$$\text{S del tr.} = \frac{\text{Base x Altura}}{2}$$ o el que és el mateix en el nostre triangle

$$\text{S del tr.} = \frac{Y \times Z}{2}$$ o el que és el mateix $$\text{S del tr.} = \frac{2X \times Z}{2}$$

L'altura d'aquest triangle, compleix la condició següent, ser l'apotema d'un hexàgon, constituït per sis triangles equilàters iguals.
Com hem dit, el catet major serà igual a l'apotema.

Apotema = Z   i com hem vist abans

$Y^2 = X^2 + Z^2$ per tant
$Y^2 - X^2 = Z^2$

La superfície de l'hexàgon serà:

$$\text{S de l'hexàgon} = 6\,\frac{Y \times Z}{2}$$ però, podem escriure:

S de l'hexàgon = $3 (Y \times Z)$

o el que és igual

S de l’hexàgon = semiperímetre x apotema.

Això podem traslladar-lo a qualsevol polígon regular.

15.3 LA CIRCUMFERÈNCIA

Un cas de polígon regular es la circumferència, que la definirem com a un polígon regular, que te infinits costats i l’apotema igual al radi.

S d’un Polígon qualsevol = semiperímetre x apotema.

No era complicat determinar empíricament, quan mesurava la longitud d’una circumferència, bastava un cap o una piola, col·locat al voltant del cercle, del que es volia conèixer la seva superfície.
Però el problema real era l’invers, si volem dibuixar una circumferència, d’una superfície determinada, quin ha de ser el seu radi?

La primera idea era la de prendre la mitjana del quadrat inscrit, i del quadrat circumscrit.
Però fent relació entre el radi i la longitud de la circumferència per una banda i del radi i la superfície del cercle, apareixia una constant.
Si podíem conèixer la longitud empíricament i la relacionem amb el radi, resultava que per a tots el casos, de diferents radis i diferents longituds, es complia que la constant era igual.
El resultat no podia ser mes encoratjador, la constant obtinguda, donava igualment resultats, si volíem mesurar la longitud d’una circumferència, com si volíem determinar la superfície del cercle.

$\dfrac{22}{7}$ aquest valor, anomenat π primitiu, dona una aproximació extraordinària al valor actual de π.

π primitiu = 3.1428

π actual = 3.1416

En primer lloc, tractarem la superfície, a un quadrat que te com a costat el radi, si el multipliquem per la constant, obtenim la superfície del cercle.
La constant obtinguda era:
Per tant:

$$\text{Radi}^2 \times \frac{22}{7} = \text{superfície del cercle}$$

Igualment per a determinar la longitud de la circumferència, bastarà multiplicar el doble del radi per la constant.

$$2 \times Radi \times \frac{22}{7} = \text{longitud de la circumferència}$$

Conegut el π actual tindrem

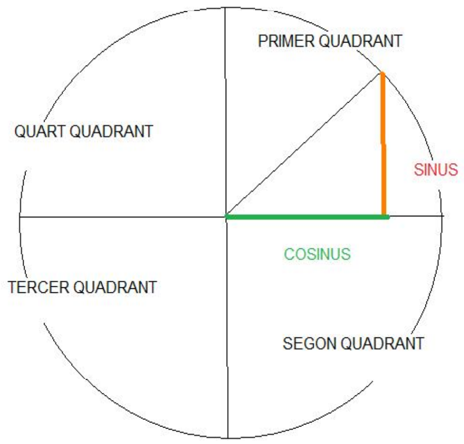
$R^2 \times \pi$ = superfície del cercle
2 x R x p = longitud de la circumferència

CAPÍTOL XVI
BREU INTRODUCCIÓ A LA TRIGONOMETRIA CLÀSSICA
Pep Bermejo

16.1 ELS PRINCIPIS DE LA TRIGONOMETRIA SINUS I COSINUS

En principi, l'objectiu de la trigonometria era resoldre el valor dels costats d'un triangle.
A la resolució geomètrica mitjançant un àbac, va seguir el sistema tabulat, per a resoldre el valor de, sinus i cosinus.

Es molt important remarcar, que per arribar a aquestes conclusions era imprescindible la divisió de la circumferència en 360º i per tant els orígens son de l'època d'Eratostens o posterior.



Sinus i cosinus

Partint del valor dels triangles rectangles estudiats i considerant la vertical com a sinus i la horitzontal com a cosinus i partint d'una hipotenusa qualsevol i que per comoditat considerem 1, tindrem que:

TRIANGLE SAGRAT (valors aproximats al sencer més pròxim)
Sinus de 00º............ 0.0 a = 1 b = 0.8 c = 0.6
Sinus de 37º.............0.6
Sinus de 53º.............0.8
Sinus de 90º............ 1.0

Cosinus de 00º..........1.0
Cosinus de 37º..........0.8
Cosinus de 53º..........0.6
Cosinus de 90º..........0.0

TRIANGLE ESCAIRATIC (valors aproximats al sencer més pròxim)
Sinus de 00º............ 0.0 a = 1 b = 0.7 c = 0.7
Sinus de 45º.............0.7
Sinus de 90º............ 1.0

Cosinus de 00º..........1.0
Cosinus de 45º..........0.7
Cosinus de 90º..........0.0

TRIANGLE CARTABONIC (valors aproximats al sencer més pròxim)

Sinus de 00º............ 0.0 a = 1 b = 0.9 c = 0.5
Sinus de 30º.............0.5
Sinus de 60º.............0.9
Sinus de 90º............ 1.0

Cosinus de 00º..........1.0
Cosinus de 30º..........0.9
Cosinus de 60º..........0.5
Cosinus de 90º..........0.0

Del que hem determinat per a cada triangle, podem deduir unes taules elementals i pròximes, als corresponents valors de sinus i cosinus.

TAULA DELS SINUS	corresponen al valor actual amb decimals
Sinus de 00º...................0.0	0.000
Sinus de 30º...................0.5	0.500
Sinus de 37º...................0.6	0.601
Sinus de 45º...................0.7	0.707

Sinus de 53º...................0.8 0.799
Sinus de 60º...................0.9 0.866
Sinus de 90º...................1.0 1.000

TAULA DELS COSINUS

Cosinus de 00º..............1.0 1.000
Cosinus de 30º..............0.9 0.866
Cosinus de 37º..............0.8 0.799
Cosinus de 45º..............0.7 0.707
Cosinus de 53º..............0.6 0.601
Cosinus de 60º..............0.5 0.500
Cosinus de 90º..............0.0 0.000

A partir d'aquestes taules es pot saber el valor dels catets d'un triangle rectangle.
Per això caldrà multiplicar el valor del Sinus o el Cosinus corresponent al graus i multiplicar-lo per la longitud de la hipotenusa.

Imaginem que tenim una hipotenusa de 15 i volem saber el valor dels catets, si els angles complementaris menors son 30º i 60º.

Per tant, per a 60º tindrem un Sinus de 0.9 i un Cosinus de 0.5
Els catets per tant valdran:

0.9 x 15 = 13.5 i 0.5 x 15 = 7.5

Si estudiem l'altre angle, 30º, tindrem un Sinus de 0.5 i un Cosinus de 0.9

0.5 x 15 = 7.5 i 0.9 x 15 = 13.5

Els catets valen 13.5 el corresponent oposat a l'angle de 60º i 7.5 el corresponent oposat a l'angle de 30º.

Si volem comprovar pel teorema de Pitàgores obtindríem:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 13.5^2 + 7.5^2$

el valor de **a** és 15. 3, que tenint en compta les aproximacions amb les que hem treballat, és un resultat molt vàlid i força exacte.