

CAPÍTOL X

Les projeccions de Cresques Abraham

Pep Bermejo

**Però l'esforç humà no del tot s'esborra,
I vells mapes de terres, de mars, del firmament,
ens diuen de com va ser de profund el domini,
el poder d'aquest poble del qual nosaltres som
legítims fills, hereus i servidors alhora;
del clos avui al lliure demà que guanyarem.**

Salvador Espriu (1957)

**Em graviten astrolabis i papers
Al bell mig de s'esguard. Vestigis
D'històries de pilots i de tempestes.**

**Son tretze anys,
De buidar ratlles als papers,
Amb es ritme fosc de ses mareas**

**Prou se el que heu de patir,
Terres cruelment desconcaves. Per mi**

Alhora enfora, ses ones minven.

Reflexions del cartògraf
Josep Antón Ballet (1979)

10.1 PROCÉS D'ANÀLISI

Vèiem, que podia existir una relació entre el mètode emprat per Piri Reis i el de Cresques Abraham, les comparacions eren un sucós fruit, força engrescador, al cap d'algun temps, aquesta via va ser abandonada, dons no trobàvem una relació aprofitable.



Atlas català

Cresques Abraham i el seu fill Cresques Sefudà, més tard Jaume Rius al tenir que convertir-se al cristianisme, autor i coautor de l'Atlas català.

Més endavant, retornant a analitzar l'Atlas català, de forma independent, sense tractar de fer cap comparació, va aparèixer un curiós detall, estudiàvem sols la part que contenia la Península Ibèrica.

El Port natural del Musel a Gijón, Astúries, era el centre, d'una circumferència, en principi pensàvem, que es tractava d'una sola circumferència, aprofundint més en el tema, apareixien, no una, si no quatre circumferències concèntriques amb centre al Musel.

S'imposava estudiar tot el document complert a fons, podria donar-nos informació sobre el sistema de projecció?

A les hores, tot va estar prou clar, agafant tota la Mediterrània, com si es tractés d'un trenca closques, varem adonar-nos de que no era un sol centre amb una sèrie de cercles, si no una sèrie de centres que permetien solapar-se, a partir de circumferències secants i tangents.



De l'anàlisi del document de Cresques, l'Atlas català, s'esdevenia el següent:

Cresques que a més de cartògraf era bruixoler, va ser el primer en fer aparèixer a les seves cartes, la rosa dels vents, més endavant veurem quina utilitat tenia.

Si analitzem tota la Mediterrània, referida a l'Atlas català, trobem una sèrie de cercles concèntrics agrupats al voltant de vuit centres.

Dos dels centres corresponen, l'oriental a un punt situat al mar, en un lloc equidistant de les actuals costes de Turquia i Grècia, l'altre punt està situat al nord-oest de la península Ibèrica, coincidint amb el port natural del Musel a Gijón.

Segons la carta, aquets dos punts tenen la mateixa latitud.

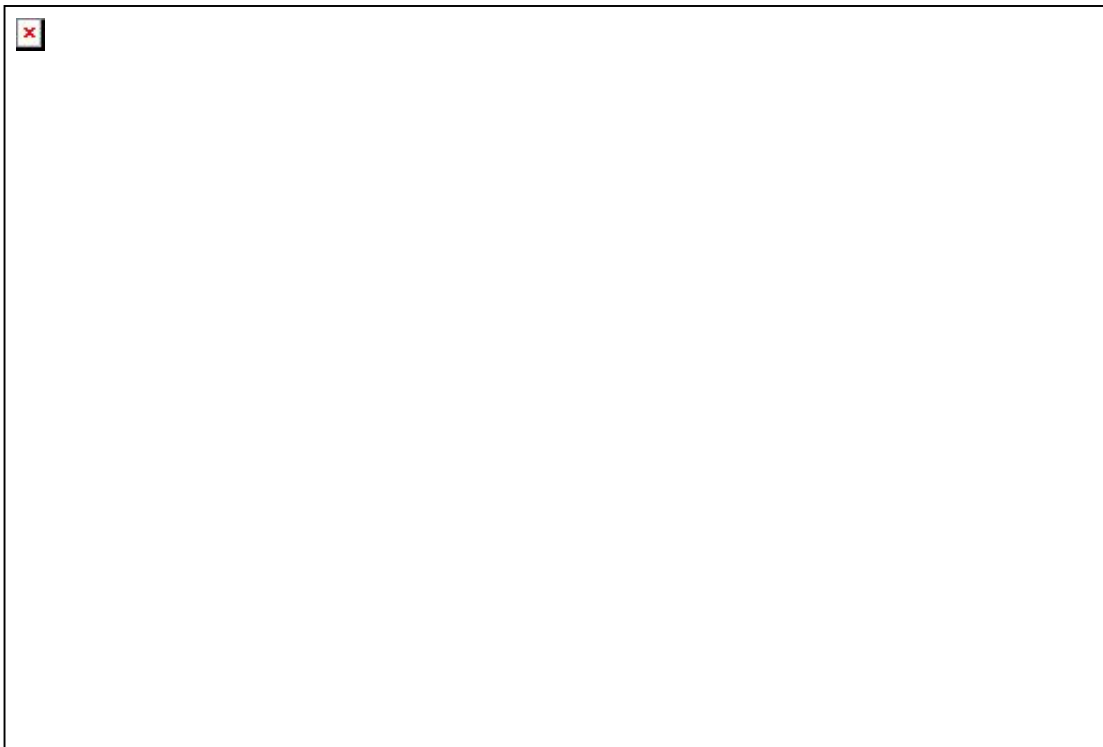
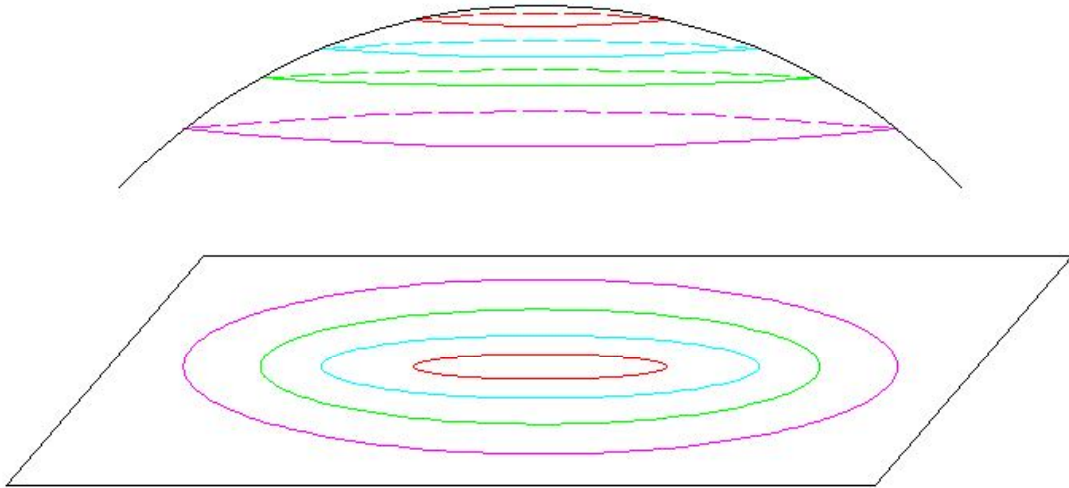
Dels altres sis centres que afecten a l'ària Mediterrània, tres estan al nord, del paral·lel que conté els dos centres esmentats, els tres restants estan al sud.

La posició d'aquets centres està fora de la carta dibuixada, però son perfectament deduïbles.

Tant els tres centres situats al nord, del paral·lel de referència, com els situats al sud, cada grup de tres, està situat sobre un mateix paral·lel, a la carta.

Cada un dels vuit centres, genera al seu voltant, 4 circumferències concèntriques, per a facilitar la feina, em dibuixat cada circumferència d'un color diferent:

Vermell el de radi menor, l'anomenarem a efectes de càlcul α .
Blau el que el segueix, l'anomenarem a efectes de càlcul β .
Verd el tercer, l'anomenarem a efectes de càlcul λ .
Carbassa el més exterior, l'anomenarem a efectes de càlcul μ .



La observació de la part Mediterrània de l'Atlas català, així calorejat, ens permet fer les següents afirmacions.

Els radis de les circumferències, son iguals per a cada conjunt.

Dins d'un mateix grup de cercles concèntrics, l'increment de la mesura dels radis no es constant, el radi del cercle vermell que anomenarem α , multiplicat per dos es igual al radi del cercle blau que anomenarem β .

Per tant $2 \text{ radi } \alpha = \text{radi } \beta$.

Però quan observem el cercle verd, que anomenem λ el seu radi, no segueix la progressió

Per tant
3 radi α -/- diferent de radi λ .
Radi β + radi α -/- diferent de radi λ .

Quan observem el cercle exterior, el carbassa, que anomenem μ , determinem que l'increment del seu radi tampoc compleix cap progressió ni cap relació referida als dos radis primers

Per tant
4 radi α -/- diferent de radi μ .
radi β + λ -/- diferent de radi μ .

Però és important remarcar, que els radis de les circumferències, son iguals per a cada conjunt, per tant si observem el cercles representats de forma total o parcial es donarà el següent:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n \\ \beta_1 &= \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n \\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n\end{aligned}$$

És necessari també establir la relació entre les diferents circumferències: Sols les circumferències verdes i carbasses estan relacionades.

Cada cercle verd és tangent al carbassa pròxim o el carbassa és tangent al verd.

Els cercles carbasses entre si, sempre son secants.

Una nota aclaridora, des del centre del Musel, agafant-lo com a mostra, ens trobem amb les següents dades.

La circumferència de radi menor α , la vermella, passa pel golf de Biscaia i per Portus a la costa portuguesa.

La segona circumferència β , la blava, passa per Gibraltar i Sant Vicente.

La tercera λ , la verda, arriba a les Illes britàniques, al nord. Al canal entre Balears i Còrsega i Sardenya al est. Algèria i Marroc, al sud i a l'oest, coincidint amb la latitud del Musel, la rosa dels vents.

La quarta μ , la carbassa, passa pel nord de les illes britàniques, per la Rochelle pràcticament, a poca distància i a l'est de Còrsega i Sardenya i per Tunísia al sud.

Naturalment cal pensar en que devia existir algun motiu per a la diferències entre els radis, la casualitat no existeix i menys aquí.

Tal com hem dit, Cresques va ser el primer en dibuixar la rosa dels vents en una carta de navegació, a les hores dites portolans.

Quines especials connotacions te la rosa de Cresques?

Divideix la rosa en vuit vents.

Les divisions inferiors permeten arribar a determinar i mesurar les quartes.

Està sobre la circumferència verda

Està sobre el paral·lel del Musel

Està sobre el meridià de les Illes Canàries, això tindrà que ser estudiat amb gran atenció pel que significa. respecta a l'extensió Atlàntica.

Quin interès especial tenia aquest dibuix, dons feia de transportador per traçar rumbos. Si des de un lloc conegut, es volia fer rumb a un altre lloc, ambdós representats a la carta, calia transportar un paral·lela, al rumb determinat, fins a tallar el centre de la rosa, això permetia determinar el rumb que calia fer.

Aquest sistema, s'empra encara actualment, especialment als països anglosaxons, les cartes de l'Almirallat, disposen de cercles graduats a llocs diferents i estratègics de les cartes de punt menor o major o simplement un cercle quan es tracta de navegació costanera o aprofitges, la rosa ha estat substituïda per un cercle graduat, que te la mateixa funció, que va proposar Cresques Abraham.

Anem a un altre tema, seguint la trajectòria de l'anàlisi de l'Atlas català i a partir del que ja he enumerat, podem considerar de forma fefaent, quin sistema va utilitzar Cresques per tal de dibuixar en projecció plana, una esfera, de la que ja es coneixien forces dades, especialment els diàmetres i el sistema reticulat per a determinar els valors de latitud i longitud? Caldria potser rellegir el que fa referència als precursors.

No crec que fos gens senzill per a Cresques Abraham, recopilar i contrastar totes les dades incorporades al seu Atlas, cal pensar en anys d'investigació, fins a tenir prou informació per a complir l'encàrrec del Comte de Barcelona.

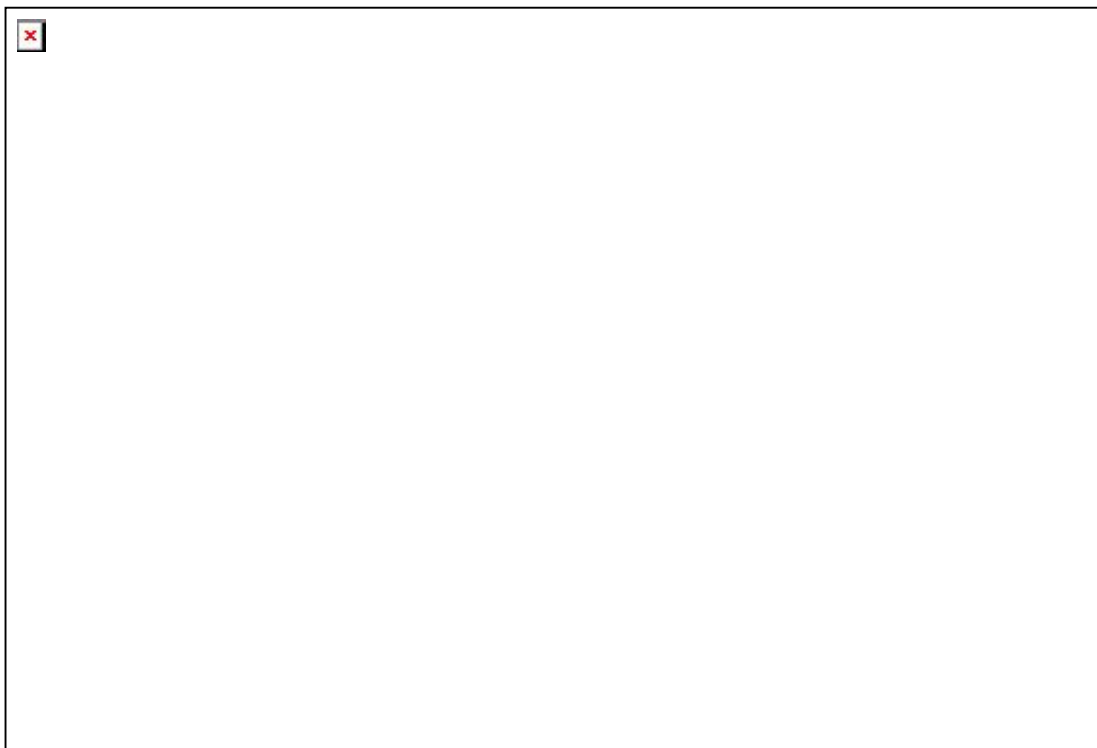
La rosa també servia per a situar els punts coneguts, cal fer extensió al mètode de situar els punts per loxodròmica i fent mitjanes i modes.

El sistema de projecció és extraordinàriament enginyós, els cercles dels que hem estat parlant son en realitat la clau del coneixement del sistema de projecció emprat per Cresques i l'escola mallorquina, molt probablement aquesta escola, un notable grup de bruixolers i cartògrafs, foren els més avançats de la seva època en tot el món occidental.

El cercle primer, el vermell, te un radi menor i es projecta directament sobre un pla que és tangent al centre, a continuació es projecta sobre el pla, la corona circular compresa entre la circumferència vermella i la blava, el mateix calia fer

amb les dues corones circulars exteriors, la qualitat de la projecció és força exacta.

Quan es comparava la superfície coberta pel cercle primer, del centre a la circumferència carbassa, projectada sobre el pla de referència, calia ajustar la posició dels punts quan entraven en conflicte amb la posició dels mateixos punts dels cercles veïns. Això en quan al sistema de projecció.



D'un estudi minuciós de tot el Atlas, apreciarem certes inexactituds, que poden ser fruit ja sigui de les variacions que ha pogut tenir en 700 anys el suport de pell sobre el que estava grafiat. La projecció considerant el nord geogràfic o el nord magnètic.

Els errors d'apreciació de navegants i d'altres, que és quasi impossible determinar.

Alguns dels més significatius i que caldrà tenir en compta, és una diferència de nord en el segon cercle, a l'Adriàtic, de 13° NE i que la diferència entre punts suposadament de la mateixa latitud, El Musel i el punt 2, centre del segon cercle, hi han 5° de diferència de latitud.

Quan observem el meridià 0, el que queda determinat per la rosa dels vents i que a més passa per l'Illa del Hierro, el seu nord coincideix amb el nord vertader o geogràfic, quan determinem per la unió dels dos punts secants, de les circumferències exteriors, les carbasses, ens dona una diferència de 13° NE, entre la línia recta i el nord vertader, com acabem de dir, si repassem la diferència, entre les isògones de Hierro i el punt de l'Adriàtic, concorda exactament en aquesta diferència, per tant geomètricament com per la suma dels valors d'aquests meridians magnètics, la diferència entre ells, és amb molta exactitud, $12^{\circ} 52'$, l'única raó per tenir aquesta diferència, hem pogut contrastar-la i és conseqüència del que hem dit sobre la diferència.

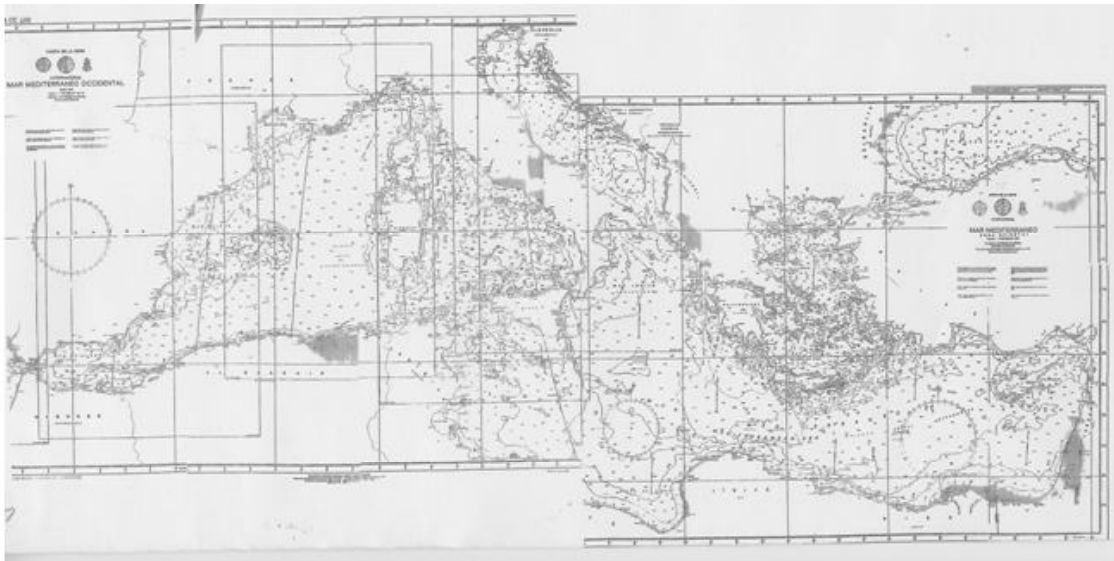
Cresques va utilitzar, no el nord vertader si no el nord magnètic, per això queda clarament i exactament justificat, la diferència de latitud entre els dos punts principals, el d'El Musel i el de l'Adriàtic.

Com fer-ho per a determinar distàncies reals i conjuminar-les amb les distàncies de les cartes, he llegit opinions de diversos investigadors, sobre diferències entre les distàncies de les cartes i les distàncies reals, un criteri generalitzat es que l'artista havia de multiplicar la distància que obtenia de la carta per un número tal que donés com a resultat la distància vertadera.

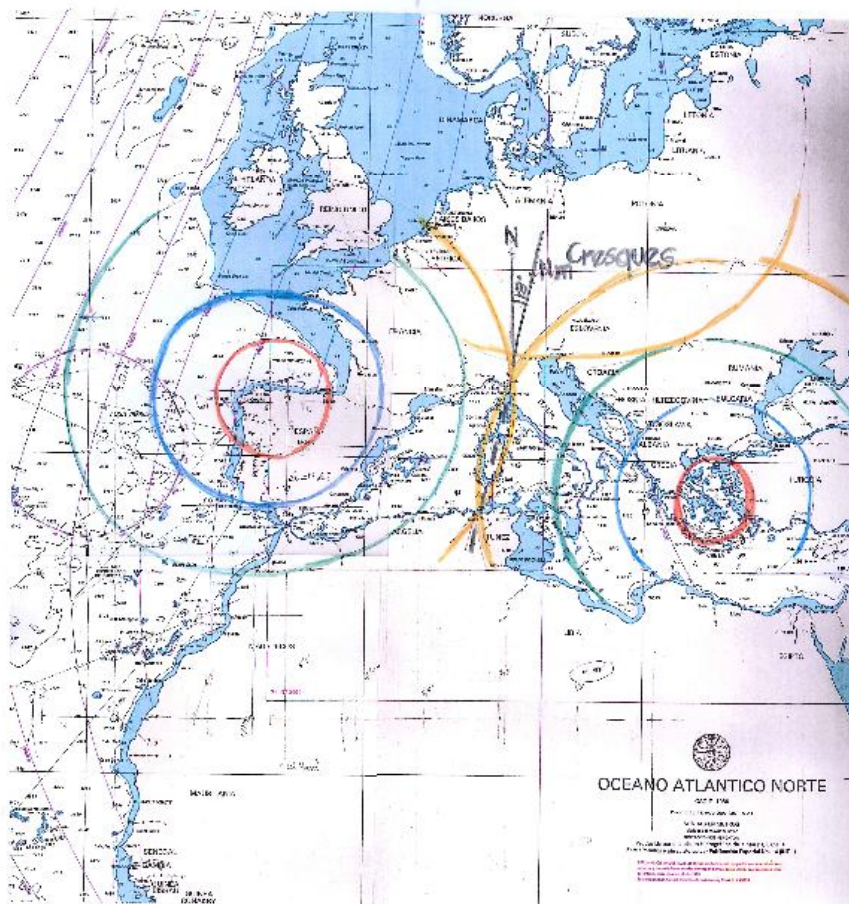
He anat a comprovar distàncies entre punts coneguts i determinables, tant en una carta actual de projecció Mercator i l'Atlas català, he mesurat sobre l'escala de les latituds la distancia escollida a la carta Mercator i he utilitzat l'escalímetre de l'atlas, com a resultat, l'exactitud quasi total, la unitat de mesura de Cresques és la milla i en el futur treballarem per a determinar i convertir a metres amb exactitud el valor de la milla a l'atlas.

El resultat de l'operació no admet cap dubte, l'escalímetre està corregit, de manera que la lectura directa de la distància obtinguda amb el compàs de puntes, al traslladar-la al escalímetre corregit, ens dona la distància real.

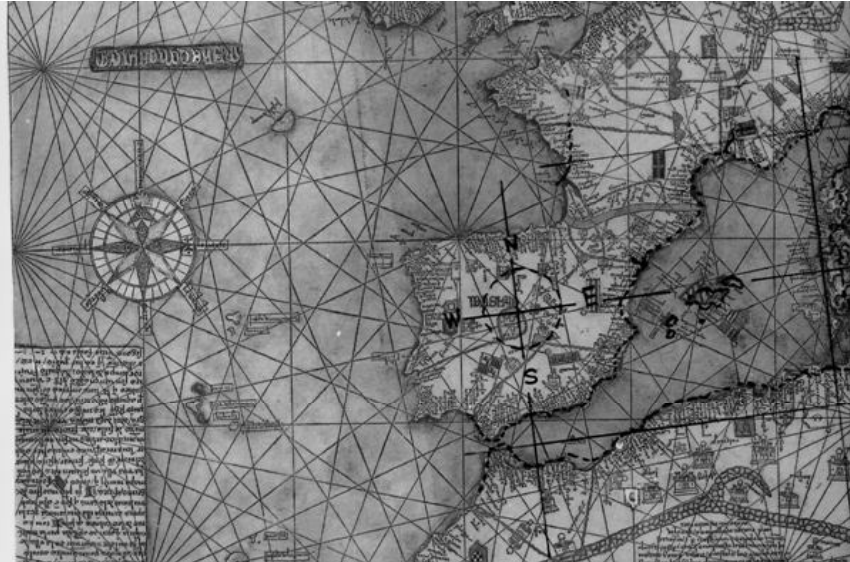
Una carta actual de la Mediterrània



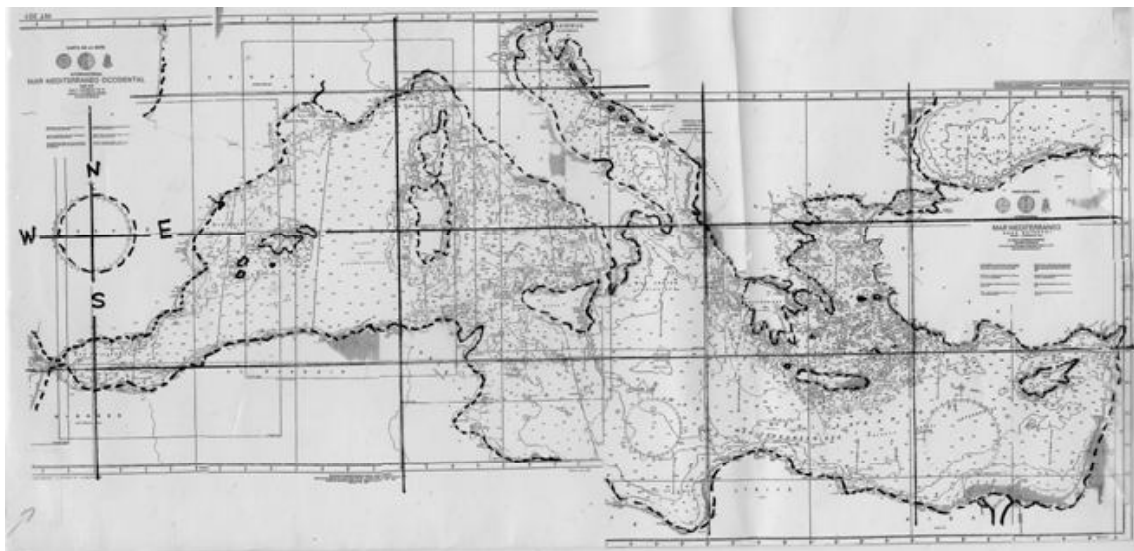
Comparació del sistema de Cresques sobre una carta actual evidenciant la diferència de latitud i la diferència de 13° entre el nord vertader i el magnètic



Diferències angulars entre el nord geogràfic i el magnètic



Puntejat sobre una carta actual del Portolà de la Mediterrània, l'Atles català de Cresques, situant les correctes latituds, variant els meridians magnètic i vertader o per a fer coincidir les formes de la costa



10.2 L'AVALUACIÓ DE LES MIDES

Determinar els valors de la fletxa i les fletxes com a diferència de les corones circulars a partir de la fórmula:

$$rH = dLox = 2.0778 \sqrt{eo}$$

unitats

rH.....radi Horitzò en milles.

dLoxdistància loxodròmica en milles.

elev obs...elevació de l'observador en metres

2.0778.....una constant per a la conversió de metres en milles

Si considerem que la elevació (eo) és igual a la fletxa de la corba, tindrem, com que resulta coneguda la d, distància o radi Horitzò, el nostre procés de càlcul serà:

$$\sqrt{\text{Valor de la fletxa de la curvatura de la Terra}} = \frac{rH}{2.0778}$$

O el que és el mateix:

$$\text{Valor de la fletxa de la curvatura de la Terra} = \left(\frac{rH^2}{2.0778} \right)$$

A partir d'aquestes fórmules i aplicant els valors obtinguts a l'atlas, com que el valor del primer radi, α , corresponent al cercle vermell tindrem:

$$r\alpha = 240'$$

$$\text{Valor de la fletxa de la curvatura de la Terra} = \left(\frac{240^2}{2.0778} \right) = 13341.8$$

13341.8 seran metres

Per a convertir-ho en ' (milles) caldrà dividir per 1852.4

$$\frac{13341.8}{1852.4} = 7.2'$$

Per tant en els nostres càlculs, utilitzarem la milla com a unitat.

Per establir la diferència entre la distància real entre dos punts, mesurada sobre l'esfera terrestre i la distància entre els dos mateixos punts, sobre la projecció caldrà estudiar el següent.

Primer serà necessari conèixer la longitud de l'arc de circumferència per tant:

$$\text{Longitud en ' de l'arc} = \frac{2\pi r}{360} n^{\circ}$$

r = radi de la Terra

n° = número de graus de l'arc

$2\pi r$ = longitud d'un cercle màxim de la Terra.

La longitud d'un cercle màxim de la Terra, que com a valor conegut, no caldrà calcular

Longitud d'un cercle màxim de la Terra = $360^{\circ} \times 60 = 21600'$

Ara el que hem de conèixer es el número de graus als que correspon la projecció.

Per això hem de demanar l'auxili dels triangles un altre cop.

Malgrat tot, l'objectiu era determinar el sistema emprat de projecció, ja podem dir que està desvetllat, encara hi ha detalls, que podrem afegir més endavant.

Alguns investigadors del sistema de projecció de les cartes de l'escola mallorquina, han fet valoracions que crec que son errades o inexactes, cal valorar de totes formes, la aproximació al sistema circular, és evident que en cap de les relacions a les que he tingut accés, es determina la sèrie de cercles i la seva relació i en tots els casos, es considera un sistema de projecció similar al sistema gnomònic, no es te en compta la successió de corones circulars i la condició de tangència entre els cercles λ_n i μ_n , ni la condició de secant per relacionar els cercles μ_n .

Un cop establert el sistema seguit i la manera de determinar els radis convindria endinsar-nos en un altre aspecte, el valor de radis, les superfícies corresponents a cada corona circular i al cercle central.

Fem un resum per veure simplificat les relacions de radis i superfícies:-

El paral·lel de referència, és el que uneix els dos centres principals, El Musel i el segon cercle, a l'Adriàtic.

Radis	Relació
El cercle α te un radi de 240'	4
El cercle β te un radi de 480'	8
El cercle λ te un radi de 540'	9
El cercle μ te un radi de 660'	11

Les diferències de radi	Relació
Radi α ,240'	4
Radi α , radi β240'	4
Radi β , radi λ60'	1
Radi λ , radi μ120'	2

Per establir les diferències hem dividit per 60, per que tots els números son divisibles, un altre cop el 60, probablement el quadrat pitagòric ha estat la referència.

Les superfícies dels cercles

Al centre de la circumferència l'anomenarem 0.

El cercle central determinat per la circumferència 0- α te un radi de 240', per tant:

$$\pi \cdot r_{\alpha}^2 = 180\,955.7368 \text{ milles quadrades, superfície del cercle central o } 0\alpha.$$

El segon cercle 0- β te un radi de 480'

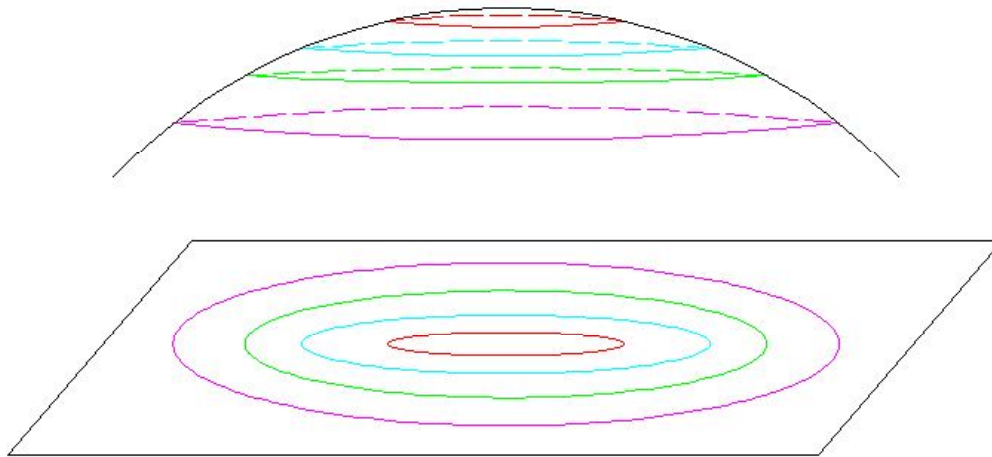
$$\pi \cdot r_{\beta}^2 = 723822.9474 \text{ milles quadrades.}$$

El tercer cercle 0- λ te un radi de 540'

$$\pi \cdot r_{\lambda}^2 = 916088.4178 \text{ milles quadrades.}$$

El quart cercle 0- μ te un radi de 660'

$$\pi \cdot r_{\mu}^2 = 1\,368\,477.76 \text{ milles quadrades.}$$



Les superfícies de les corones

El cercle central limitat per 0-a te una superfície de:

$$\pi \cdot r \alpha^2 = 180\,955.7368 \text{ milles quadrades.}$$

La corona immediata, limitada per α i β , com que el seu radi exterior és 480' i l'interior 240'. Tindrem que:

$$\pi \cdot r \beta^2 - \pi \cdot r \alpha^2 = 723\,822.9474 - 180\,955.7368 = 542\,867.2106 \text{ milles quadrades.}$$

La corona immediata, limitada per β i λ , com que el seu radi exterior és 540' i l'interior 480'. Tindrem que:

$$\pi \cdot r \lambda^2 - \pi \cdot r \beta^2 = 916\,088.4178 - 723\,822.947 = 192\,265.4708 \text{ milles quadrades}$$

La corona immediata, limitada per μ i λ , com que el seu radi exterior és 660' i l'interior 540'. Tindrem que:

$$\pi \cdot r \mu^2 - \pi \cdot r \lambda^2 = 1\,368\,477.76 - 916\,088.4178 = 452\,389.3422 \text{ milles quadrades}$$

Resum de les superfícies

La superfície del centre 0- α , te un total de.....180 955.7368 milles quadrades

La corona limitada per α - β , te un total de.....542 867.2106 milles quadrades

La corona limitada per β - λ , te un total de.....192 265.4708 milles quadrades

La corona limitada per λ - μ , te un total de.....452 389.3422 milles quadrades

La superfície limitada per 0- μ tindrà un total de..1 368 477. 76 milles quadrades

Estudi de la superfície del casquet esfèric

Per determinar la superfície del casquet i per a poder determinar la diferència amb la superfície del cercle 0-μ.

Però en primer lloc, cal dotar-nos d'unes eines per tal de poder resoldre les equacions de càlcul de la superfície del casquet i després poder establir la relació entre la superfície real, la superfície esfèrica i la representada a la carta, superfície plana.

El coneixement ens permetrà determinar la qualitat de la projecció, emprada per Cresques i els cartògrafs posteriors que van basar-se en les projeccions de l'escola catalana de Mallorca.

Determinació dels elements necessaris per a desenvolupar els càlculs.

La fórmula del Radi horitzó, caldrà transformar-la en els valors que hem de menester.

$$rH = 2.0778 \sqrt{e_0}$$

Aquesta fórmula ens relaciona la (e_0), elevació de l'observador en funció del rH, radi d'horitzó visible.

Ara be nosaltres coneixem el radi, i per tant el que és la nostra incògnita, és la elevació necessària del observador.

$$\sqrt{e_0} = \frac{rH}{2.0778}$$

Aquesta fórmula se convertirà per nosaltres en:

$$\sqrt{h} = \frac{a}{2.0778}$$

A = radi de la circumferència que estudiem.

h = altura del casquet, entre el pla de referència i el zenit o el que també anomenem fletxa del casquet.

O el que és el mateix, per a treure l'arrel quadrada.

$$h = \left(\frac{a^2}{2.0778} \right)$$

ATENCIÓ

Aquesta fórmula ens treballarà el valor de "h" en metres i "a" en milles.

a = radi de la circumferència que estudiem

h = altura del casquet, entre el pla de referència i el zenit o el que també anomenem fletxa del casquet.

Superfície del casquet

$$S_{\text{casquet}} = \pi (a^2 + h^2)$$

a = radi de la circumferència que estudiem

h = altura del casquet, entre el pla de referència i el zenit o el que també anomenem fletxa del casquet.

En primer lloc caldrà determinar el valor de **h**, substituint valors:

$$h = \left(\frac{660'}{2.0778} \right)^2 = 100\,897.4957 \text{ metres}$$

Per a convertir aquest valor en milles, per a unificar les unitats tindrem:

$$h \text{ en milles} = \frac{h \text{ en metres}}{1852.4} = \frac{100\,897.4957}{1852.4} = 54.5 \text{ milles}$$

El radi equatorial de la Terra és de 6 378 Km equivalents a 6 378 000 metres i a 3443.1' milles.

El valor mitjà de la milla marina actual és de 1852.4 m.

Ara podem determinar la superfície del casquet i substituint valors de la fórmula:

$$S_{\text{casquet}} = \pi (a^2 + h^2) = \pi (660'^2 + 54.5^2) = 1\,377\,809.10 \text{ milles quadrades}$$

S del cercle 0-μ = 1 368 477. 76 milles quadrades.

L'increment de superfície, ΔS serà = 9 331.34 milles quadrades

$$\frac{1\,377\,809.10}{1\,368\,477.76} = 1.0068 \quad \sqrt{1.0068} = 1.0034$$

Per tant la relació serà = 1.0068 en milles quadrades i 1.0034 referides a milles lineals.

Una navegació feta entre dos punts A i B, distants 100' sobre la carta, tindrà una distància real de:

$$100 \cdot 1.0034 = 100.34'$$

Aquesta diferència evidentment no és gens significativa i per tant, prou exacta, no sols per l'època en que es va dibuixar la carta, si no pel valor absolut..

10.3 LA CONSTRUCCIÓ DE LA CARTA

De tot això determinem que la projecció emprada per Cresques, estava basada en la projecció sobre un pla, que podia ser secant a la circumferència exterior o tangent al punt zenital del conjunt.

Es evident que calia farcir el conjunt de retícules amb l'informació rebuda de navegants, tenim com a mostra el següent informe tret del molt doctra llibre d'Antoni Guinard i Bujosa, La cartografia mallorquina a Mallorca, que fa referència a un document datat entre 1250 i 1265, probablement d'origen pisà. En aquest document, posterior als periplos i anterior als derroters, s'enumeren una sèrie de relacions entre rumbos i distàncies que havien de servir al cartògraf per a poder situar sobre l'estructura base, els diferents punts geogràfics que permetien la redacció de la carta, veiem alguns interessants exemples.

An la dicta isola de Maiorca à una bona cettade: da garbino2 millara è de bono porto con 2 torre e cadena e a nome Porto Pino.

De lo dicto Porto Pino à lo capo de Corvo 20 millare per siloco. De lo dicto Capo Corvo à Saline, 25 millara per levante. La dicta Salina è ponta soctile e negra. De Salina a Porto Petro 25 millara per greco.

Lo dito porto Petro à entrada da siroco. La dicta boca de porto Petro è larga una gumena. En lo capo de lo dicto porto da ver lo grco è una guardia, et en la boca à una torre.....

.....

De lo dicto porto Petro à porto Colombo 5 millara per greco.....

De lo dicto porto Colombo à capo de Mola 25 millara per tramontana ver lo grco quarto.

De lo dicto capo de Mola a capo de la Pera 5 millara per tramontana ver lo maestro.

De lo capo de Pera a lo capo de Artano ch'ede capo de lo golfo de Polenza de ver lo siloco, 7 millara, entre maestro e tramontana.

.....

Un cop establerta la base de la carta a partir dels cercles de centres coneguts i creada la xarxa de punts auxiliars, calia consultar un gran número d'informacions per anar situant punts coneguts pel mètode de rumb i distància, de fet, el resultat, no el procediment, s'assembla força al sistema de Mercator.

Cal imaginar, a partir d'aquestes informacions, que havia de consultar-se gran número de d'elles i que a més calia esbrinar quines podien ser creïbles i quines no, probablement alguns arraixs tenien més crèdit que d'altres i a més debia estar en poder del cartògraf d'altres cartes portolans.

No és d'estranyar que calgués tan de temps per a dibuixar una carta, és evident, que els cartògrafs de fama, devien posseir gran quantitat d'informació i

que per assolir certa credibilitat, era necessari haver treballat en tallers de renom i haver copiat moltes dades dels mestres, cal suposar també, que per qüestions gremials.

La orientació queda limitada a les quartes i les distàncies a milles, clar que cal veure a quin tipus de milles es refereix, es evident que convien un gran número de milles de valors força diferent i a la vegada inexacta o força inexacta.

Res no fa suposar, que les milles de Cresques, no foren iguals o molt pròximes a les reals.

He comprovat rumbos i distàncies que obtenim de l'atles i comparades amb les reals, en cartes mercatorianes i obtingudes per càlcul loxodròmic, fora de la diferència de nord i fent abstracció de valors reals, puc dir que l'aproximació és molt notable, encara que no absoluta.